Linear Algebra

[KOMS120301] - 2023/2024

13.3 - Sifat-Sifat Transformasi Linier

Dewi Sintiari

Program Studi S1 Ilmu Komputer
Universitas Pendidikan Ganesha

Week 13 (November 2023)

Tujuan pembelajaran

Setelah perkuliahan ini, Anda diharapkan mampu:

1. menjelaskan berbagai sifat dari masing-masing transformasi linier dalam ruang vektor.

Sifat-sifat Transformasi Matriks

(page 270 of Elementary LA Applications book)

Komposisi transformasi matriks

Let:

- T_A: transformasi matriks dari $\mathbb{R}^n$ menjadi $\mathbb{R}^k$
- T_B: transformasi matriks dari $\mathbb{R}^k$ menjadi $\mathbb{R}^m$

Misalkan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dan definisikan transformasi:

$$\mathbf{x} \xrightarrow{T_A} T_A(\mathbf{x}) \xrightarrow{T_B} T_B(T_A(\mathbf{x}))$$

mendefinisikan transformasi dari $\mathbb{R}^n$ menjadi $\mathbb{R}^m$.

Ini disebut komposisi T_B dengan T_A dan dilambangkan dengan $T_B \circ T_A$. Jadi:

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x}))$$

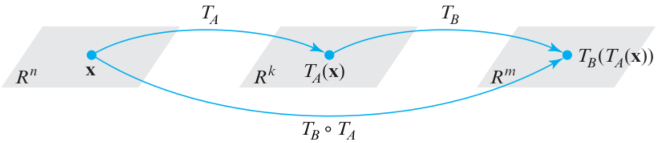
Komposisinya merupakan transformasi matriks, karena:

$$(T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x})) = B(T_A(\mathbf{x})) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x}$$

artinya hasil komposisi ke $\mathbf{x}$ diperoleh dengan cara mengalikan $\mathbf{x}$ dengan BA di sebelah kiri.

Dilambangkan dengan:

$$T_B \circ T_A = T_{BA}$$



Komposisi tiga transformasi

Komposisi dapat didefinisikan untuk setiap suksesi terbatas dari transformasi matriks yang domain dan rentangnya mempunyai dimensi yang sesuai. Misalnya, diberikan:

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \;\; T_B : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell, T_C : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^m$$

kita dapat menentukan komposisinya:

$$(T_C \circ T_B \circ T_A) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

dengan:

$$(T_C \circ T_B \circ T_A)(\mathbf{x}) = T_C(T_B(T_A(\mathbf{x})))$$

Dapat ditunjukkan bahwa ini merupakan transformasi matriks dengan matriks standar CBA, dan:

$$T_C \circ T_B \circ T_A = T_{CBA}$$

Notasi

Kita dapat menulis matriks standar untuk transformasi $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tanpa menentukan nama matriks standar.

Ini sering ditulis sebagai $[T]$.

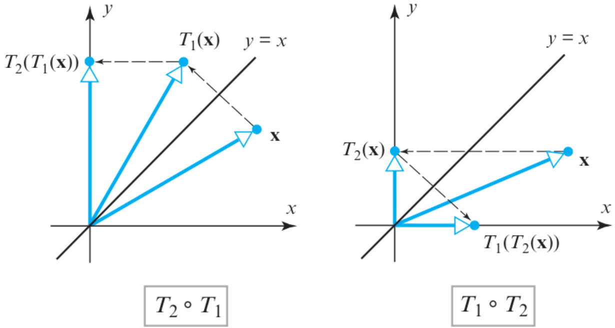
Sebagai contoh:

- $T(\mathbf{x}) = [T]\mathbf{x}$
- $[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1]$
- $[T_3 \circ T_2 \circ T_1] = [T_3][T_2][T_1]$

Contoh

Misal

- $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *menjadi bayangan garis* $y = x$;
- $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *menjadi proyeksi ortogonal ke sumbu* y.



Secara geometris, kedua transformasi mempunyai pengaruh yang berbeda pada **x**

Komposisi tidak bersifat komutatif (*cont.*)

Secara aljabar, kita dapat menghitung:

$$[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa: $[T_1 \circ T_2] \neq [T_2 \circ T_1]$.

Contoh

Diketahui :

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad dan \quad T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

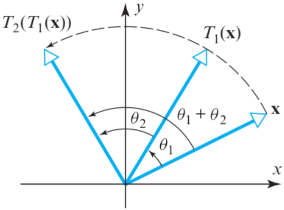
operator matriks yang memutar vektor terhadap titik asal masing-masing melalui sudut θ_1 dan θ_2.

Jadi, operasinya:

$$T_2 \circ T_1(\mathbf{x}) = T_2(T_1(\mathbf{x}))$$

pertama-tama putar x melalui sudut θ_1, lalu putar $T_1(\mathbf{x})$ melalui sudut θ_2.

Oleh karena itu, $(T_2 \circ T_1)(\mathbf{x})$ mendefinisikan rotasi $\mathbf{x}$ melalui sudut $\theta_1 + \theta_2$.



Dalam hal ini, kami memiliki:

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad [T_2] = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

Kita tunjukkan bahwa: $[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1]$

$$\text{Note that} \quad [T_2 \circ T_1] = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

Lebih lanjut:

$$\begin{aligned}
[T_2][T_1] &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1 & -(\cos\theta_2\sin\theta_1 + \sin\theta_2\cos\theta_1) \\ \sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1 & -\sin\theta_2 sin\theta_1 + \cos\theta_2\cos\theta_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \\
&= [T_2 \circ T_1]
\end{aligned}$$

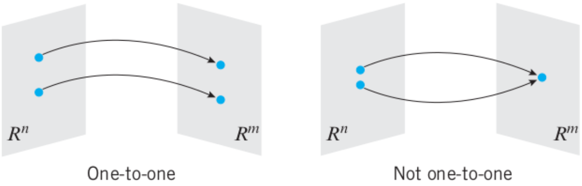
Dapat dengan mudah dilihat bahwa $[T_2 \circ T_1] = [T_1 \circ T_2]$ (karenanya, komutatif).

Latihan

Read Contoh 3 and Contoh 4 (page 272-273)

One-to-one matrix transformation

Transformasi matriks $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dikatakan one-to-one jika T_A memetakan vektor-vektor (titik) berbeda di $\mathbb{R}^n$ menjadi vektor-vektor berbeda (poin) dalam $\mathbb{R}^m$.



Equivalent statements:

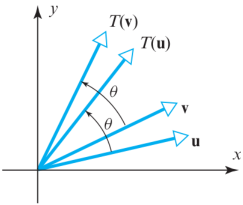
- T_A adalah satu-satu jika $\forall \mathbf{b}$ dalam rentang A, terdapat tepat satu vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, s.t. $T_A \mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- T_A adalah satu-ke-satu jika persamaan $T_A(\mathbf{u}) = T_A(\mathbf{v})$ menyiratkan bahwa $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Operator rotasi pada $\mathbb{R}^2$ adalah operator rotasi satu-ke-satu.

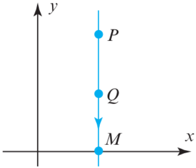
karena vektor-vektor berbeda yang diputar melalui sudut yang sama mempunyai bayangan yang berbeda.

Proyeksi ortogonal $\mathbb{R}^2$ ke sumbu x bukanlah proyeksi satu-ke-satu.

karena ia memetakan titik-titik berbeda pada garis vertikal yang sama ke titik yang sama.



▲ Figure 4.10.6 Distinct vectors **u** and **v** are rotated into distinct vectors $T(\mathbf{u})$ and $T(\mathbf{v})$.



▲ Figure 4.10.7 The distinct points P and Q are mapped into the same point M.

Kernel dan *range*

Jika $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ adalah transformasi matriks, maka himpunan semua vektor di RR^n yang dipetakan T_A menjadi 0 disebut kernel dari T_A dan dilambangkan dengan $\ker(T_A)$, yaitu:

$$\ker(T_A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

Himpunan semua vektor dalam $\mathbb{R}^m$ yang merupakan gambar di bawah transformasi setidaknya satu vektor dalam $\mathbb{R}^n$ disebut range of T_A dan dilambangkan dengan $R(T_A)$, yaitu:

$$R(T_A) = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \text{ s.t. } \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ where } A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$$

Secara singkat:

$$\ker(T_A) = \text{null space of } A$$
$$R(T_A) = \text{column space of } A$$

Misalkan A adalah matriks $(m \times n)$.

Three ways of viewing the same subspace of $\mathbb{R}^n$:

- **Matrix view:** ruang *null* dari A
- **System view:** ruang solusi $A\mathbf{x} = 0$
- **Transformation view:** kernel dari T_A

Tiga cara melihat subruang yang sama $\mathbb{R}^m$:

- **Matrix view:** ruang kolom A
- **System view:** semua $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ yang $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ konsisten
- **Transformation view:** k*range* dari T_A

Latihan

Baca Contoh 5 dan Contoh 6 di halaman 275.

One-to-one matrix operator

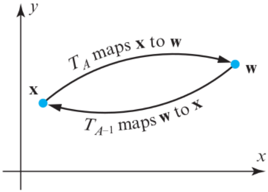
Misalkan $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ adalah operator matriks satu-ke-satu. Jadi, A dapat dibalik.

inverse operator atau inverse dari T_A didefinisikan sebagai:

$$T_{A^{-1}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Dalam hal ini:

$$T_A(T_{A^{-1}}(\mathbf{x})) = AA^{-1}\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \text{or, equivalently} \quad T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{AA^{-1}} = T_I$$
$$T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{x})) = A^{-1}A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \text{or, equivalently} \quad T_{A^{-1}} \circ T_A = T_{A^{-1}A} = T_I$$



T_A memetakan $\mathbf{x}$ ke $\mathbf{w}$ dan $T_{A^{-1}}$ memetakan $\mathbf{w}$ kembali ke $\mathbf{x}$, yaitu.,

$$T_{A^{-1}}(\mathbf{w}) = T_{A^{-1}}(T_A(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

Latihan

Baca Contoh 7 dan Contoh 8 di halaman 276.

THEOREM 4.10.2 Equivalent Statements

If A is an $n \times n$ matrix, then the following statements are equivalent.

(a) A is invertible.

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has only the trivial solution.

(c) The reduced row echelon form of A is I_n.

(d) A is expressible as a product of elementary matrices.

(e) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is consistent for every $n \times 1$ matrix $\mathbf{b}$.

(f) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has exactly one solution for every $n \times 1$ matrix $\mathbf{b}$.

(g) $\det(A) \neq 0$.

(h) The column vectors of A are linearly independent.

(i) The row vectors of A are linearly independent.

(j) The column vectors of A span R^n.

(k) The row vectors of A span R^n.

(l) The column vectors of A form a basis for R^n.

(m) The row vectors of A form a basis for R^n.

(n) A has rank n.

(o) A has nullity 0.

(p) The orthogonal complement of the null space of A is R^n.

(q) The orthogonal complement of the row space of A is $\{\mathbf{0}\}$.

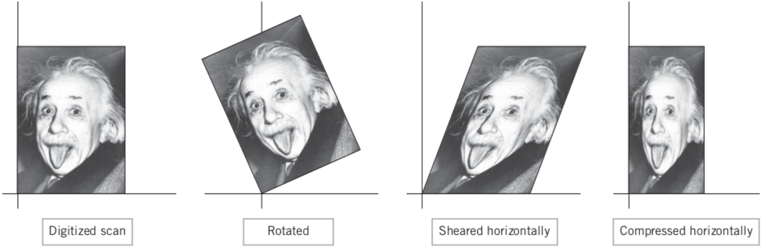
(r) The kernel of T_A is $\{\mathbf{0}\}$.

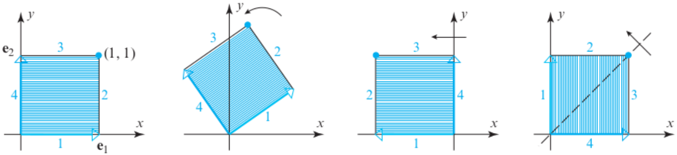
(s) The range of T_A is R^n.

(t) T_A is one-to-one.

Geometri Operator Matriks pada $\mathbb{R}^2$

(page 280 of Elementary LA Applications book) *bersambung...*


Digitized scan
Rotated
Sheared horizontally
Compressed horizontally



Unit square

Unit square rotated

Unit square reflected about the y-axis

Unit square reflected about the line $y = x$

Diberikan transformasi $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ yang merupakan perkalian dengan matriks yang dapat dibalik. Tentukan bayangan dari:

1. Sebuah garis lurus
2. Garis yang melalui titik asal
3. Garis paralel
4. Ruas garis yang menghubungkan titik P dan Q
5. Tiga titik terletak pada satu garis

Task:

Bagilah diri Anda menjadi 5 kelompok, dan periksalah setiap pertanyaannya!

Latihan

Pertanyaan 1

Diberikan matriks transformasi:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Find the image of line $y = 2x + 1$ under the transformation.

Pertanyaan 2

Given a transformation matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Temukan gambar persegi satuan pada *kuadran pertama* di bawah transformasi.

Latihan

Tentukan bayangan persegi satuan pada transformasi berikut:

- Refleksi terhadap sumbu y
- Refleksi terhadap sumbu x
- Refleksi terhadap garis $y = x$
- Rotasi terhadap titik asal melalui sudut positif θ
- Kompresi dalam arah x dengan faktor k dengan $0 < k < 1$
- Kompresi dalam arah y dengan faktor k dengan $0 < k < 1$
- Ekspansi ke arah x dengan faktor k dengan $k > 1$
- Ekspansi ke arah y dengan faktor k dengan $k > 1$
- *Shear* ke arah x dengan faktor k dengan $k > 0$
- *Shear* ke arah x dengan faktor k dengan $k < 0$
- *Shear* ke arah y dengan faktor k dengan $k > 0$
- *Shear* ke arah y dengan faktor k dengan $k < 0$

This is the end of slide...